Série d'exercices n° 2

Exercice 1

Soit A l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$f(z) = \alpha z + \beta \bar{z} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

$(A, +, \circ)$ est-il un anneau ?

Exercice 2

1. Trouver tous les sous-anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.
2. Trouver tous les morphismes d'anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Exercice 3

Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Montrer que $(\mathbb{D}, +, \times)$ est un anneau. Déterminer le groupe des unités de $\mathbb{D}$.

Exercice 4

On considère l'ensemble

$$A = \{m + n\sqrt{6} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau intègre.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \phi : & A & \to & A \\ & m + n\sqrt{6} & \mapsto & m - n\sqrt{6} \end{array}$$
est un automorphisme d'anneaux.
3. Soit $x \in A$. On pose $N(x) = x\phi(x)$. Etablir que
$$\forall x, y \in A \quad N(x \times y) = N(x) \times N(y)$$
4. Montrer que x est inversible dans A si et seulement si $N(x) = \pm 1$ (Remarquer que $N(x) \in \mathbb{Z}$).
5. Vérifier que $5 + 2\sqrt{6}$ est inversible dans A et calculer son inverse.

Exercice 5

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps.

Exercice 6

1. Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, et I et J deux idéaux de A.
Montrer que $I \cap J$ et $I + J$ sont des idéaux de A.

2. On pose $A = \mathbb{Z}$, $I = a\mathbb{Z}$, et $J = b\mathbb{Z}$, où $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$I + J = d\mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad d = a \wedge b$$

$$I \cap J = m\mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad m = a \vee b$$

Exercice 7 (Caractéristique d'un corps)

Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif. On considère le morphisme d'anneaux suivant :

$$\begin{array}{rccc} f : & (\mathbb{Z}, +, \times) & \to & (K, +, \times) \\ & m & \mapsto & m1_K \end{array}$$

Alors, $\ker(f) = \{m \in \mathbb{Z} \mid m1_K = 0_K\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
D'après l'Exercice 3 de la Série 1, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f) = n\mathbb{Z}$.
L'entier n est appelé la **caractéristique** du corps K.

1. Quelle est la valeur de n lorsque $K = \mathbb{R}$?
2. On suppose que le corps K est fini. Montrer que n est un nombre premier.

Exercice 8 (Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$)

On considère le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ (voir l'Exercice 7 de la Série 1), où $n \in \mathbb{N}^*$.
On munit l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'une deuxième loi de composition interne :

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{ab}, \qquad \forall \overline{a}, \ \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si et seulement si n est premier.